# 使用 Geogebra 检验恒功率启动的计算结果

继在“[使用 Geogebra 解常微分方程](https://enjoyphysics.cn/Article2997)”中检验电磁感应中恒力启动问题之后，这篇文章对交通工具的恒功率启动问题进行检验，在高中阶段的此类问题中，一旦涉及到“**多久、多远后达到稳定速度**”的数值计算题，往往是错题的重灾区。

## 1、理论推导

质量为 *m* 汽车的额定功率为 *P*，运动过程中受到恒定阻力 *f*，汽车运动的初速度为 *v*0，在运动过程中满足牛顿第二定律 *F* – *f* = *ma*，且 *P* = *Fv*，可得：

− *f* = *ma*

对应的微分方程为：

*m* = − *f*

分离变量得：

d*t* = d*v*

两边积分（右侧的积分可利用 ）解决）可得：

*t* = [ *P* – *fv* −*P* ln(*P* – *fv*) ] + *C*

考虑初始条件为：*t* = 0 时，*v* = *v*0，解得常数 *C* 为 − [ *P* – *fv*0 −*P* ln(*P* – *fv*0) ]，代入上式得：

*t* = ln −

## 2、在 Geogebra 中的实现

由理论推导出了 *t* – *v* 函数，就可以用来进行数值计算，其实用 excel 也可以完成相同的工作，但 Geogebra 有滑动条，可以直观、动态地改变输入参数，使用比较方便。

更符合使用习惯的是 *v* – *t* 函数图像，但是上述 *t* - *v* 函数的反函数无法用初等函数表示，上网查了一下，*v* – *t* 函数的表达要涉及一个叫做 [Lambert W 函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%9C%97%E4%BC%AFW%E5%87%BD%E6%95%B0/2500676?fr=aladdin)的特殊函数：*W*(*x*)e*W*(*x*) = *x*，所以目前在 Geogebra 中只能绘制出 *t* - *v* 图像。

为了适用不同的数据，并没有直接将 *P*、*f* 作为输入参数，而是适当变形。由于 *a* = · − ，可以令 *k* = ，*b* = ，这样将前面的理论推导变化为：

*t* = ln −

在 Geogebra 中的操作步骤如下：

1、设置滑动条 k、b、v0、m 和 v；

2、输入函数表达式：f(x)=如果(x≥v0, ((k)/(b^(2))) ln(((k-b v0)/(k-b x)))-((x-v0)/(b)))；

3、设置变量 t = f(v)，求速度为 v 时所用时间；

4、输入：s = 积分(f,v0,v)；设置变量 S = vt – s，求物体走过的位移。说明：积分求得的 *t* – *v* 图像的面积，而我们要求的是 *v* – *t* 图像的面积，因此需要用矩形面积 vt 减去积分面积。

## 3、在 Geogebra 中验证

### 例 1

此题为 2009 年上海高考题。

质量为 5×103 kg 的汽车在 *t* = 0 时刻速度 *v*0 = 10 m/s，随后以 *P* = 6×104 W 的额定功率沿平直公路继续前进，经 72 s 达到最大速度，设汽车受恒定阻力，其大小为 2.5×103 N。求：

（1）汽车的最大速度 *v*m；

（2）汽车在 72 s 内经过的路程 *s*。

**参考答案**：（1）*v*m = 24 m/s （2）*s* = 1252 m

**【分析】**

（1）汽车达到最大速度时，牵引力等于阻力，此时

*P* = *fv*m，*v*m = = m/s = 24 m/s

（2）由动能定理得

*Pt* − *fs* = *mvm*2 − *mv*02

*s* = = 1252 m

**【验证】**

此题中，*k* = = 12，*b* = = 0.5。在 Geogebra 中将滑动条设置为 k = 12，b = 0.5，m = 5000，v0 = 10。将 v 设置为 22.1，求出 t = 71.67，s = 1331.57。如下图所示：



**点击图片打开网站可进入程序**

根据计算，**这道高考题数据有问题！**在 72 s 内汽车无法达到 24 m/s，只有 22.1 m/s。如果要改进的话，可以将时间设置得长一些，例如当 *t* = 209.4 s 时，速度能达到 23.9 m/s，此时位移为 4554.36 m。

### 例 2

一道约 15 年前的老题：

某兴趣小组对一辆自制遥控小车的性能进行研究，他们让这辆小车在水平的直轨道上由静止开始运动，并将小车运动的全过程记录下来，通过处理转化为 *v* – *t* 图象，如图所示（除 2 s ~ 10 s 时间段图象为曲线外，其余时间段图像均为直线）。已知在小车运动的过程中，2 s ~ 14 s 时间段内小车的功率保持不变，在 14 s 末停止遥控而让小车自由滑行，小车的质量为 1.0 kg，可认为在整个运动过程中小车所受到的阻力大小不变。求：

*v*/m·s-1

*t*/s

*O*

3

6

2

10

18

14

（1）小车所受到的阻力；

（2）小车匀速行驶阶段的功率；

（3）小车在加速运动过程中（指图象中 0 ~ 10 秒内）位移的大小。

**参考答案**：（1）*f* = − 1.5 N （2）*P* = 9 W （3）*s* = 42 m

**【分析】**

这里关注的是第（3）小问，在 2 ~ 10 s 内小车做加速度不断减小的加速运动，在 8 s 内速度由 3 m/s 变为 6 m/s，通过的位移为 39 m。解题过程如下：

2 s ~ 10 s 内根据动能定理：*Pt* – *fs*2 = *mv*22 − *mv*12

解得 *s*2 = 39 m

**【验证】**

此题中 *k* = = 9，*b* = = 1.5，*v*0 = 3 m/s，在 Geogebra 程序中进行验证，结果是：**在 *t* = 8 s 内位移 *s* = 40.01 m，速度只达到 5.74 m/s，并没有接近 6 m/s**。**所以此题给出的数据有问题**。

### 例 3

这是一道 20 年的老题。

电动机通过一质量不计的绳吊起质量为 8 kg 的物体，绳能承受的最大拉力为 120 N，电动机的输出功率可调整，最大输出功率为 1 200 W。要将此物体由静止起用最快的方式上升 90 m（己知此物体在吊高达到 90 m 时正好开始以最大速度匀速上升），求：（*g* 取 10 m/s2）

（1）物体上升过程中第一阶段加速度的大小和第一阶段末速度的大小；

（2）物体上升过程中的最大速度；

（3）物体上升所需最短时间。

**参考答案**：（1）*a* = 5 m/s2，*v*1 = 10 m/s （2）*v*m = 15 m/s （3）*t*min = 7.75 s

**【分析】**

关注第（3）小问，原题的解答是：

设第二阶段所用时间为 *t*2，物体上升的位移为 *h*2 = *H* – *h*1 = 90 m – 10 m = 80 m。由动能定理可得

*P*m*t*2 – *mgh*2 = *mv*22 − *mv*12

*t*2 =

代入数据后可解得 *t*2 = 5.75 s。即在恒功率阶段物体以初速 *v*1 = 10 m/s 运动，在 5.75 s 内上升 80 m，速度达到了 15 m/s。

**【验证】**

此题中 *k* = = 150，*b* = = 10，*v*0 = 10 m/s，在 Geogebra 程序中进行验证，结果是：**在 5.75 s 内上升了 80.09 m，速度达到了 14.92 m/s**。**此题的数据可以认为是正确的**。